EIN
DETERMINANTENSATZ UND SEINE UMKEHRUNG.

VON

DR. ANTON PUCHTA

IN PRAG.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 26. JULI 1877.

Ein Satz aus der Theorie der Determinanten und dessen Umkehrung.

Baltzer gibt in seiner „Theorie der Determinanten" IV. Auflage, pag. 19, den Satz, dass folgende Gleichung bestehe:

$$\text{I.}\qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d).$$

Indem ich zunächst die Gleichung:

$$\text{II.}\qquad \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)$$

bemerkte, vermuthete ich einen allgemeinen Satz, der eine Determinante von gewissem, vorläufig unbekanntem Bau in ein Product von lauter reellen Factoren zerfälle und die beiden genannten Gleichungen als Specialfälle in sich begreife. Eine solche Verallgemeinerung ergab sich mir sehr bald für $m=8$, wenn m den Grad der Determinante, d. h. die Zahl der Verticalreihen angibt. In diesem Falle lautet nämlich die fragliche Gleichung folgendermassen:

$$\text{III.}\qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{matrix} (a+b+c+d+e+f+g+h).(a+b+c+d-f-e-g-h) \\ (a+b-c-d+e+f-g-h).(a+b-c-d-e-f+g+h) \\ (a-b+c-d+e-f+g-h).(a-b+c-d-e+f-g+h) \\ (a-b-c+d+e-f-g+h).(a-b-c+d-e+f+g-h). \end{matrix}$$

Um zunächst diesen Specialfall zu beweisen, verfährt man in folgender Weise. Eine Determinante enthält einen der Factoren in III., wenn es gelingt, alle Glieder einer Colonne auf dieselbe, oder nur um einen Factor verschiedene Form, nämlich den fraglichen Theiler selbst zu bringen; um nun z. B. die Existenz des Factors

$$a-b+c-d-e+f-g+h$$

nachzuweisen, addire man zur ersten Colonne die dritte, sechste und achte, subtrahire hievon aber die vier übrigen, dann erscheint in der ersten Colonne, respective der ersten, zweiten etc. Zeile

$$\begin{array}{r}
(a-b+c-d-e+f-g+h)\\
-(a-b+c-d-e+f-g+h)\\
+(a-b+c-d-e+f-g+h)\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
(a-b+c-d-e+f-g+h),
\end{array}$$

so dass also der genannte Factor offenbar auftritt; ganz analog ergeben sich die übrigen Factoren, und dass in III. rechts kein numerischer Factor hinzutritt, ergibt sich aus der Vergleichung des Diagonalgliedes von links $= a^8$ mit dem Anfangsglied $= a^8$ von rechts, womit die Gleichung III. erwiesen ist.

Den tiefer liegenden Grund, dessen Erfassung unmittelbar zur Evidenz von III. führt, werden wir weiter unten kennen lernen.

Auch für $m = 16$ ergab sich mir sehr bald eine entsprechende Gleichung, also dahin lautend, dass eine gewisse Determinante 16ten Grades gleich sei einem Product aus 16 Factoren, und ich glaube dieselbe aus dem Grunde noch hersetzen zu sollen, damit sie nöthigenfalls zur Illustration des allgemeinen Satzes benützt werden kann, ohne dass ich jedoch den Beweis für die Richtigkeit dieses speciellen Falles erbringe, da er sich unter dem allgemeinen subsummirt.

$$\text{IV.}\qquad \begin{vmatrix}
a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m & n & o & p\\
b & a & d & c & f & e & h & g & j & i & l & k & n & m & p & o\\
c & d & a & b & g & h & e & f & k & l & i & j & o & p & m & n\\
d & c & b & a & h & g & f & e & l & k & j & i & p & o & n & m\\
e & f & g & h & a & b & c & d & m & n & o & p & i & j & k & l\\
f & e & h & g & b & a & d & c & n & m & p & o & j & i & l & k\\
g & h & e & f & c & d & a & b & o & p & m & n & k & l & i & j\\
h & g & f & e & d & c & b & a & p & o & n & m & l & k & j & i\\
i & j & k & l & m & n & o & p & a & b & c & d & e & f & g & h\\
j & i & l & k & n & m & p & o & b & a & d & c & f & e & h & g\\
k & l & i & j & o & p & m & n & c & d & a & b & g & h & e & f\\
l & k & j & i & p & o & n & m & d & c & b & a & h & g & f & e\\
m & n & o & p & i & j & k & l & e & f & g & h & a & b & c & d\\
n & m & p & o & j & i & l & k & f & e & h & g & b & a & d & c\\
o & p & m & n & k & l & i & j & g & h & e & f & c & d & a & b\\
p & o & n & m & l & k & j & i & h & g & f & e & d & c & b & a
\end{vmatrix} = \prod_{16}(a\pm b\pm c\pm d\pm e\pm f\pm g\pm h\pm i\pm j\pm k\pm l\pm m\pm n\pm o\pm p).$$

Die Entwickelung des Productes rechts, d. h. die 16 Factoren explicite und das sie beherrschende Gesetz gebe ich später an.

Was nun, indem ich auf den allgemeinen Fall übergehe, zunächst den Grad der Determinante betrifft, so ist $m = 2^n$, wobei n eine beliebige ganze Zahl bedeutet und um den Bau derselben zu übersehen, bemerke ich, dass nur 2^n Buchstaben als Elemente auftreten, also wenn a_i irgend ein Element ist, i von 1 bis 2^n variirt. Das Bildungsgesetz der Determinante selbst ergibt sich mit voller Klarheit daraus, dass jede vom Grade $m = 2^n$ in viere vom Grade $m' = 2^{n-1}$ dadurch zerfällt, dass man nach der 2^{n-1}ten Zeile und Colonne einen horizontalen, respective verticalen Strich zieht. Diese vier Unterdeterminanten, die ich bezüglich ihrer Lage in nachstehender Weise bezeichne:

$$\text{V)} \dots \qquad \begin{matrix} \text{I.} & \text{II.} \\ \text{III.} & \text{IV.} \end{matrix}$$

werden immer nur aus der halben Zahl von Elementen gebildet, und zwar finden sich in I. und IV. nur die Elemente: $a_1, a_2 \dots a_{2^{n-1}}$ und in II. und III. diejenigen von: $a_{2^{n-1}+1} \dots a_{2^n}$; man bemerkt also eine gewisse Symmetrie bezüglich der Diagonale, welche von fundamentaler Bedeutung wird, und die sich noch weiter verfolgen lässt; dafür spricht der Umstand, dass z. B. I. wieder in vier Unterdeterminanten vom Grade 2^{n-2} zerschnitten werden kann: 1, 2, 3, 4, wo also 1 und 4 die Elemente $a_1, a_2, \dots a_{2^{n-2}}$ etc. enthalten und hieraus ergibt sich durch weiteres Verfolgen dieses Algorithmus ein Verfahren, durch aufsteigende Bildung Determinanten von immer höherem Grade zu bilden, sowie das Gesetz: Jede Zeile und Colonne enthält jedes der 2^n-Elemente, und zwar immer nur einmal. Damit dürfte das Bildungsgesetz in die kürzeste Fassung gebracht sein. Um auf die Bildung der Factoren überzugehen — die Anzahl derselben kommt dem Grade der Determinante gleich — so zeigt sich zunächst ein Factor mit lauter positiven Gliedern $= \sum_{i=1}^{i=2^n} a_i$, der durch Addition sämmtlicher Colonnen zur ersten unter Beachtung des obigen Symmetriegesetzes offenbar erhalten wird, also z. B. in IV. der Factor

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o+p,$$

und die übrigen Factoren enthalten jeder gleich viele positive und negative Glieder, so z. B. kommt in IV. auch folgender vor:

$$a+b+c+d+e+f+g+h-i-j-k-l-m-n-o-p,$$

und im allgemeinen Falle:

$$\text{A)} \dots \qquad \sum_{i=1}^{i=2^{n-1}} a_i - \sum_{k=2^{n-1}+1}^{k=2^n} a_k$$

Der erste Factor, dessen Existenz nachgewiesen ist, kann auch in der Form geschrieben werden:

$$\text{a)} \dots \qquad \sum_{i=1}^{i=2^n} a_i = \sum_{i=1}^{i=2^{n-1}} a_i + \sum_{k=2^{n-1}+1}^{k=2^n} a_k$$

Vergleicht man dann *A)* mit *a)*, so erkennt man, dass *A)* aus *a)* erhalten wird, indem man sämmtliche Glieder nach dem 2^{n-1}ten in *a)* negativ nimmt; ich will diesen Process zur Abkürzung eine „Knickung an der Stelle 2^{n-1}" heissen. Solche Knickungsstellen gibt es nämlich, wie sich gleich ergeben wird, im Ganzen n und zwar haben dieselben, respective die Indices:

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^4 \dots 2^{n-1}$$

Wir können die Bedeutung einer Knickungsstelle auch so ausdrücken, z. B. bei der 2^{n-1}ten:

Ist bei der Determinante von bezeichnetem Baue und Grade $= 2^n$ ein Factor

$$\text{M)} \dots \qquad (a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_{2^{n-1}}) + (\pm a_{2^{n-1}+1} \pm a_{2^{n-1}+2} \pm \dots \pm a_{2^n})$$

nachgewiesen, so besitzt sie auch folgenden, der durch eine Knickung an der Stelle 2^{n-1} entsteht:

$$N)\ldots \qquad (a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{2^{n-1}}) - (\pm a_{2^{n-1}+1} \pm a_{2^{n-1}+2} \pm \ldots \pm a_{2^n}).$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung resultirt durch folgende Überlegung. Der Factor M entsteht nach der Voraussetzung durch Addition, respective Subtraction sämmtlicher Colonnen zur ersten; wodurch er dann mit dem Zeichen Plus oder Minus in der ersten Colonne auftritt; wiederholt man jedoch dieselben Additionen, respective Subtractionen sämmtlicher Colonnen zur ersten, nachdem zuvor die zweiten Hälften der Zeilen und Colonnen, d. h. jede Zeile, respective Colonne der zweiten Hälfte der Determinante mit -1 multiplicirt wurden, so bleibt die Determinante selbst ungeändert und es resultirt statt *M)* wegen der auf Seite 3 unter V. bemerkten Symmetrie der Factor *N)*, womit die Richtigkeit der Behauptung zu Tage tritt.

Genau in derselben Weise gestaltet sich der Beweis für die übrigen Knickungsstellen. Ehe ich jedoch hierauf weiter eingehe, will ich bemerken, dass der Schluss für die Existenz der 2^n-Factoren aus der Evidenz des Factors *a)* unter Benützung der n-Knickungsstellen ohne Weiteres sich ergibt, so dass also für das Folgende die Behauptung bezüglich der übrigen Knickungsstellen allein noch zu bewahrheiten erübrigt.

Zunächst wollen wir jedoch bemerken, dass in *a)*, respective in *A)*, die sämmtlichen Glieder a_l und $a_{2^{n-1}+l}$, wo l eine der ganzen Zahlen von 1 bis 2^{n-1} bedeutet, durchwegs dasselbe Zeichen in *a)*, und durchwegs entgegengesetzte in *A)* haben, so dass also in *a)* sämmtliche Glieder positiv, in *A)* die Hälfte positiv und die andere negativ ist, eine Eigenschaft, die sich aus dem Einflusse der Knickungsstellen leicht für alle übrigen Factoren ergibt, so dass ich auf den Nachweis dieser Zeichenregel nicht weiter eingehen zu müssen glaube.

Fassen wir das Frühere nochmals kurz zusammen, so können wir also sagen, dass in Folge der Knickungsstelle 2^{n-1} der Factor *A)* sich dadurch aus *a)* ergab, dass wir die Colonnen, deren Index um 2^{n-1} absteht, entsprechend der 2^{n-1}ten Knickungsstelle, in *a)* zur ersten addirten, dagegen in *A)* sämmtlich von der Summe aller übrigen subtrahirten. Allein *a)*, respective *A)*, lassen sich auch so schreiben:

$$a)\ldots \qquad \sum_{1}^{2^{n-2}} a_i + \sum_{2^{n-2}+1}^{2^{n-1}} a_h + \sum_{2^{n-1}+1}^{2^{n-1}+2^{n-2}} a_k + \sum_{2^{n-1}+2^{n-2}+1}^{2^n} a_l \equiv \sum_{1}^{2^{n-2}.1} a_i + \sum_{2^{n-2}+1}^{2^{n-2}.2} a_h + \sum_{2^{n-2}.2+1}^{2^{n-2}.3} a_k + \sum_{3.2^{n-2}+1}^{2^{n-2}.4} a_l,$$

$$A)\ldots \qquad \sum_{1}^{2^{n-2}.1} a_i + \sum_{2^{n-2}.1+1}^{2^{n-2}2} a_h - \sum_{2^{n-2}.2+1}^{2^{n-2}.2} a_k - \sum_{2^{n-2}.3+1}^{2^{n-2}.4} a_l,$$

und hieraus durch Knickung an der Stelle 2^{n-2}, d. h. nach der Colonne 2^{n-2}, also der $(n-1)$ten Knickungsstelle, resultiren folgende Factoren der Determinante:

$$b)\ldots \qquad \sum_{1}^{2^{n-2}.1} a_i - \sum_{2^{n-2}+1}^{2^{n-2}.2} a_h + \sum_{2^{n-2}.2+1}^{2^{n-2}.3} a_k - \sum_{2^{n-2}.3+1}^{2^{n-2}.4} a_l,$$

$$B)\ldots \qquad \sum_{1}^{2^{n-2}.1} a_i - \sum_{2^{n-2}.1+1}^{2^{n-2}.2} a_h - \sum_{2^{n-2}.2+1}^{2^{n-2}.3} a_k - \sum_{2^{n-2}.3+1}^{2^{n-2}.4} a_l,$$

wobei sich also *B)* aus *b)* ebenso ergibt, wie *A)* aus *a)*, wesshalb ich mich für den Nachweis der Existenz der beiden Factoren *b)* und *B)* auf *b)* allein beschränke. Dieser Nachweis ergibt sich jedoch durch die einfache Überlegung, dass man den Factor *b)* unter Beachtung der Symmetrie der Determinante, wie sie unter V. bemerkt wurde, durch dasselbe Verfahren, nämlich Addition sämmtlicher Colonnen zur ersten, erhält, wie *a)*, nachdem zuvor das zweite und vierte Viertel sämmtlicher Zeilen und Colonnen mit der negativen Einheit multiplicirt wurden, wodurch also die Determinante selbst ungeändert bleibt. Ganz entsprechend bewahrleitet man die Eigenschaft der übrigen Knicknungsstellen, worauf ich jedoch nicht weiter eingehen zu sollen glaube. Wir haben nach folgenden Colonnen Kniekungsstellen: 2^{n-1}, 2^{n-2}, 2^{n-3},...2^1, 2^0, also im Ganzen n und da jede die Zahl der aus *a)* nach einander gebildeten Factoren verdoppelt, so erhalten wir aus *a)* im Ganzen 2^n-Factoren, deren Bildung auch unabhängig von einander sich kurz so aussprechen lässt, wenn man berücksichtigt, dass die Eigenschaft einer Knickungsstelle auf so viele nachfolgende Elemente sich erstreckt, als der Index der Stelle, d. h. der Colonne, nach welcher sie stattfindet, angibt, so umfasst also z. B. die Knickung nach der Colonne 2^{n-1} die ganze zweite Hälfte der Elemente, dagegen die nach der ersten Colonne nur das Element a_2 etc.: „Man schreibe sämmtliche Elemente, die in der Determinante auftreten, nach ihrem Index geordnet hin, also von a_1, a_2,... bis $a_{\frac{n}{2}}$ und knicke an einer oder mehreren Stellen, respective auch an keiner, dann verbinde man alle Elemente vor einer Knickung durch das Zeichen Plus, dagegen so viele Elemente nach einer Knickung durch das Zeichen Minus, als der Index der Stelle angibt und beachte, dass wenn an einer nachfolgenden Knickungsstelle nicht geknickt wird, von ihr bis zur nächsten sich die Vorzeichen aller vorangehenden Elemente wiederholen, dagegen sämmtlich in die entgegengesetzten übergehen, falls geknickt wird."

Die Richtigkeit hievon ergibt sich unmittelbar aus dem Gesagten, kann jedoch aus der Beachtung der Symmetrie unter V., indem man von einer Determinante des Grades 2^{n-1} zu einer vom Grade 2^n aufsteigt, leicht direct erkannt werden.

Ich will das Gesagte an einem Beispiele erläutern und wähle hiezu einen Factor aus einer Determinante vom Grade $2^5 = 32$ und bezeichne die Stellen, wo geknickt wurde durch ein Sternchen, diejenigen, wo dieselbe unterblieb, durch eine darüber gesetzte Null und finde auf diese Weise z. B. folgenden Factor:

$$a_1{}^*-a_2{}^*-a_3+a_4{}^\circ+a_5-a_6-a_7+a_8{}^\circ+a_9-a_{10}-a_{11}+a_{12}+a_{13}-a_{14}-a_{15}+a_{16}{}^*-a_{17}+a_{18}+a_{19}-a_{20}-a_{21}+a_{22}$$
$$+a_{23}-a_{24}-a_{25}+a_{26}+a_{27}-a_{28}-a_{29}+a_{30}+a_{31}-a_{32}.$$

Weitere Beispiele bieten die Gleichungen I. bis IV. Als Nachtrag will ich nun noch die Determinante unter IV. in ein Product entwickeln, wobei ich die Factoren immer durch Übergang von nachfolgenden Knickungsstellen zu vorausgehenden bilde; auf diese Weise wird

VI.
$$\prod_{16}(a\pm b\pm c\pm d\pm e\pm f\pm g\pm h\pm i\pm j\pm k\pm l\pm m\pm n\pm o\pm p) =$$
$$(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o+p)$$
$$(a+b+c+d+e+f+g+h-i-j-k-l-m-n-o-p)$$
$$(a+b+c+d-e-f-g-h+i+j+k+l-m-n-o-p)$$
$$(a+b+c+d-e-f-g-h-i-j-k-l+m+n+o+p)$$
$$(a+b-c-d+e+f-g-h+i+j-k-l+m+n-o-p)$$
$$(a+b-c-d+e+f-g-h-i-j+k+l-m-n+o+p)$$
$$(a+b-c-d-e-f+g+h+i+j-k-l-m-n+o+p)$$
$$(a+b-c-d-e-f+g+h-i-j+k+l+m+n-o-p)$$
$$(a-b+c-d+e-f+g-h+i-j+k-l+m-n+o-p)$$
$$(a-b+c-d+e-f+g-h-i+j-k+l-m+n-o+p)$$
$$(a-b+c-d-e+f-g+h+i-j+k-l-m+n-o+p)$$
$$(a-b+c-d-e+f-g+h-i+j-k+l+m-n+o-p)$$
$$(a-b-c+d+e-f-g+h+i-j-k+l+m-n-o+p)$$
$$(a-b-c+d+e-f-g+h-i+j+k-l-m+n+o-p)$$
$$(a-b-c+d-e+f+g-h+i-j-k+l-m+n+o-p)$$
$$(a-b-c+d-e+f+g-h-i+j+k-l+m-n-o+p).$$

Bevor ich weitergehe, will ich bemerken, dass die gewöhnliche Theorie der Determinanten, indem sie ein Element mit a_{ik} bezeichnet, ein zweifach ausgedehntes Gebiet entsprechend den zwei Indices benützt, eine Vorstellung, die sich bekanntlich durch Benützung eines Gebietes von beliebig vielen Dimensionen, etwa in Analogie zu gewissen Riemann'schen Vorstellungen erweitern lässt und diese Verallgemeinerung z. B. für ein Gebiet von drei Dimensionen gestattet auch eine Verallgemeinerung des obigen Satzes, indem dort eine gewisse Symmetrie durch drei Schnittebenen sich einstellt u. s. w. und der angeführte Satz dahin generalisirt wird, dass eine Determinante von gewissem Bau in einem Gebiete von drei Dimensionen gleich wird einer Summe von Producten, welche den obigen analog sind. Doch hierauf mag nicht weiter eingegangen werden. Eine verwandte Eigenschaft soll dagegen hervorgehoben werden, es ist dies die Äquivalenz gewisser Determinanten mit einem Quadrate (Baltzer §. 5, 8 etc.); noch einen Versuch glaube ich besonders hervorheben zu sollen, der sich bei Hankel: „Theorie der complexen Zahlen" findet, wo nämlich eine Determinante mit Hilfe höherer Quadratwurzeln aus der negativen Einheit in ein Product von Factoren verwandelt wird, allein während dies Product dort symbolisch ist, ist es in unserem Satze real.

Bisher haben wir nur Producte einer geraden Anzahl von Factoren, die gewissen Determinanten gleich sind, betrachtet, wobei der Grad m der Determinante eine Potenz von zwei sein muss, wegen der wiederholt hervorgehobenen Symmetrie, worin auch der Grund liegt, dass unser Satz nicht für Determinanten ungeraden Grades gilt. Dass jedoch auch für gewisse Determinanten beliebigen Grades ein Product erhalten wird, will ich als Umkehrung des gefundenen Satzes beweisen.

Zunächst ist klar, dass jedes Product, z. B. Π_{16}, wie wir es oben hatten, das in jedem seiner 2^n-Factoren dem obigen Bildungsgesetz genügt, so dass also unter Anderem seine Glieder nur die positive oder negative Einheit als Coëfficient haben, ohne Weiteres einer gewissen symmetrischen Determinante gleich ist, die wir ohne Schwierigkeit hinschreiben können.

Allein es können auch einige Elemente Null sein oder die Anzahl der Factoren nicht die entsprechende sein, und es gelingt dennoch immer, ein solches Product in eine Determinante zu verwandeln; denn zunächst können wir die fehlenden Glieder durch Hinzufügung von weiteren, die auch gleich sein können, so ergänzen, dass die Zahl der Factoren und der Bau derselben dem obigen Satze genügt, also eine gewisse Determinante hiefür resultirt. In der letzteren hebe man die überflüssigen, durch Hinzufügung aufgetretenen Factoren heraus, dividire durch sie beide Seiten der Gleichung und setze schliesslich, um das ursprüngliche Product wieder zu erhalten, die nur zur Ergänzung dienenden Elemente gleich Null. Ein Beispiel soll dieses klar machen. Es sei das Product

$$(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c),$$

in eine Determinante zu verwandeln.

Die Ergänzung ergibt sich in diesem einfachen Falle ohne Schwierigkeit, wenn man die Gleichung I. betrachtet, die ich in folgender Form schreibe:

$$\begin{vmatrix} a+b+c+d, & b, & c, & d \\ a+b+c+d, & a, & d, & c \\ a+b+c+d, & d, & a, & b \\ a+b+c+d, & c, & b, & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\,(a-b-c+d)\,(a-b+c+d)(a+b-c-d),$$

oder wenn ich den ersten Factor wegschaffe, $d=0$ setze und durch -1 beiderseitig dividire:

$$(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c) = -\begin{vmatrix} 1, & b, & c, & d, \\ 1, & a, & d, & c, \\ 1, & d, & a, & b, \\ 1, & c, & b, & a, \end{vmatrix}$$

In der letzten Gleichung ist jedoch der Grad der Determinante noch um eine Einheit grösser als die Zahl der Factoren, allein wenn ich die erste Zeile von allen folgenden subtrahire und die Gleichheit der Glieder in der ersten Colonne beachte, erhalte ich schliesslich:

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = -\begin{vmatrix} a-b, & -c, & +c \\ -b, & a-c, & b \\ c-b, & b-c, & a \end{vmatrix}$$

und also ein Product gleich einer gleich hohen Determinante.

Dass die Reduction des Grades der Determinante auf eine solche, deren Grad der Zahl der Factoren gleich ist, stets möglich ist, ergibt folgende kurze Überlegung. Gesetzt, man habe m-Factoren gegeben und diese durch Hinzufügen der noch erforderlichen Elemente zu einer Determinante vom Grade 2^n und dem oben angegebenen Bau ergänzt, wodurch links vom Gleichheitszeichen noch p später wegzuschaffende Factoren auftreten, dann ist also

$$m+p = 2^n.$$

Bringt man nun die p ersten Colonnen auf je einen der wegzuschaffenden Factoren und dividirt beiderseitig durch diese p-Factoren, so treten in den p ersten Colonnen der Determinante nur $+1$ oder -1 als Elemente auf. Bringt man dann durch entsprechende Zeilencombinationen diejenigen Elemente der m letzten Zeilen, welche in den p ersten Colonnen stehen, sämmtlich auf Null, was offenbar stets möglich ist, so reducirt sich die Determinante des Grades $m+p$ auf ein Product aus zwei Determinanten, eine aus den Gliedern der p ersten Zeilen und Colonnen bestehend, und eine zweite aus den Elementen der m letzten Zeilen und Colonnen gebildet. Die erstere enthält nur ganze Zahlen und keinen Buchstaben und ist also einem numerischen Factor äquivalent, womit die Richtigkeit obiger Behauptung erwiesen ist.

Bis jetzt wurden die Coëfficienten der Glieder in dem Producte gleich ± 1 angenommen, beachtet man jedoch, dass z. B. gesetzt werden kann statt $3a$, $a+b+c$, wenn schliesslich $a = b = c$ wird, so können wir folgenden Satz als erwiesen aussprechen:

„Jedes Product aus m Factoren, von denen jeder aus den Elementen $a, b, c, \ldots k$ gebildet ist, kann in eine Determinante vom Grade m verwandelt werden."

Dies ist die Umkehrung des Satzes von oben, der gewisse Determinanten in Producte verwandelte.